

Praxis: Koefficienternes betydning for det grafiske forløb

Graferne for tredjegradspolynomier med forskriften $p(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ har mange træk fælles.

Betydning af a :

a bestemmer funktionens monotoniforhold, når vi "zoomer ud".

$a > 0$, dvs. a er positiv	$a < 0$, dvs. a er negativ
p er voksende, evt. afbrudt af et kort agttagende forløb for små værdier af x .	p er aftagende, evt. afbrudt af et kort voksende forløb for små værdier af x .

Betydning af b :

b bestemmer grafens krumningsforhold.

$b > 0$, dvs. b er positiv	$b < 0$, dvs. b er negativ
Grafen for p krummer opad ("glad" eller "opadhul") omkring grafens skæringspunkt med y -aksen.	Grafen for p krummer nedad ("sur" eller "nedadhul") omkring grafens skæringspunkt med y -aksen.

Betydning af c :

c bestemmer funktionens monotoniforhold omkring grafens skæringspunkt med y -aksen.

$c > 0$, dvs. c er positiv	$c < 0$, dvs. c er negativ
p er voksende omkring grafens skæringspunkt med y -aksen	p er aftagende omkring grafens skæringspunkt med y -aksen.

Vi kan aflæse c som hældningskoefficienten for tangenten til grafen for p i grafens skæringspunkt med y -aksen.

Betydning af d :

d bestemmer grafens lodrette placering.

$d > 0$, dvs. d er positiv	$d < 0$, dvs. d er negativ
p skærer y -aksen over x -aksen.	p skærer y -aksen under x -aksen.

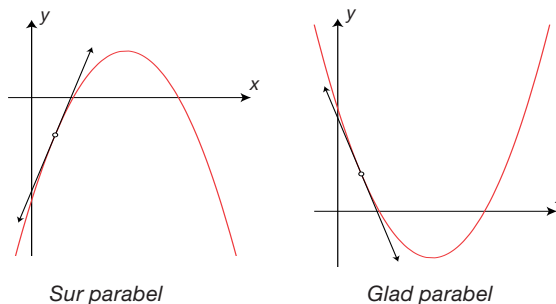
Vi kan aflæse d , som y -koordinaten i grafens skæringspunkt med y -aksen.

Opgaver

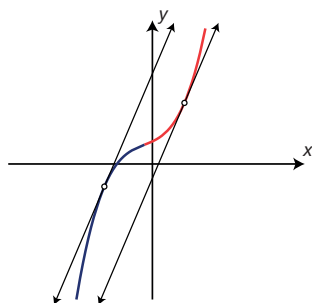
På [hjemmesiden](#) kan du finde opgaver i tilknytning til afsnit 2.1.

2.2 Vendepunktet og symmetrien for et tredjegradspolynomium (især for A-niveau)

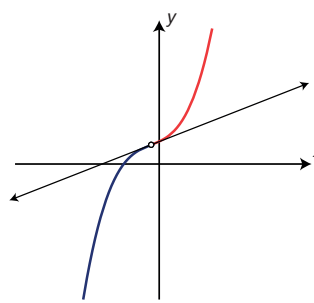
Vi har set, at grafen for et andengradspolynomium, parabeln, krummer på en karakteristisk måde: Den kan enten krumme nedad (sur parabel) eller krumme opad (glad parabel). Vi bemærker, at grafen for en sur parabel ligger *under* enhver af dens tangenter, mens grafen for en glad parabel ligger *over* enhver af dennes tangenter. Dette vil vi her acceptere ud fra en grafisk betragtning. Under emnet differentialregning vil vi bevise det.



Når vi betragter grafen for et tredjegradspolynomium, kan vi tilsvarende se, at grafen krummer på en karakteristisk måde: Dels har grafen en gren, hvor den krummer nedad (den er sur, hvilket fx viser sig ved, at tangenten ligger over grafen lige i nærheden af røringspunktet), dels har den en gren, hvor den krummer opad (den er glad, hvilket fx viser sig ved, at tangenten ligger under grafen lige i nærheden af røringspunktet).



Blå gren sur – rød gren glad



Vendepunkt med vendetangent

Definition: Vendepunkt og vendetangent

Givet en funktion f med tilhørende graf. Hvis der findes et sted på grafen, hvor denne skifter fra at krumme nedad til at krumme opad eller omvendt, så kaldes det pågældende sted for et *vendepunkt*, og den tilhørende tangent kaldes en *vendetangent*.

Geometrisk betyder dette, at grafen i *vendepunktet* skifter fra at ligge helt under til at ligge helt over vendetangenten (eller omvendt).

Enhver graf for et tredjegradspolynomium har et sådant vendepunkt med tilhørende vendetangent, hvor grafen skifter fra at krumme nedad til at krumme opad, dvs. grafen "skifter humør". De fleste værktøjsprogrammer har et indbygget værktøj til at finde vendepunkter og/eller vendetangenter for grafer.

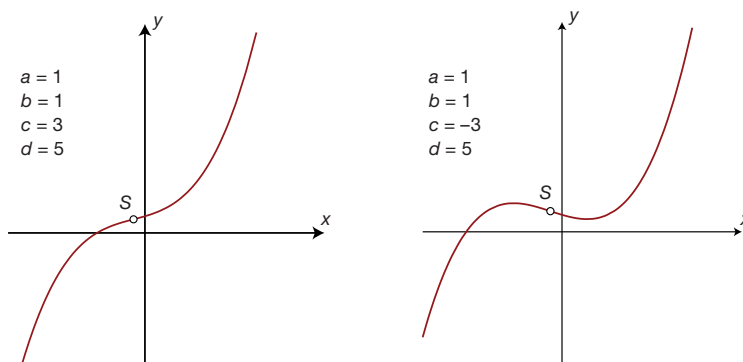
Øvelse 3.10 Tredjegradspolynomiets vendepunkt

Vi vil ved hjælp af et dynamisk geometriprogram undersøge symmetrien i grafen for et tredjegradspolynomium.

- Tegn grafen for tredjegradspolynomiet $p(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ med fire skydere for a , b , c og d . Brug fx x -intervallet fra -10 til 10 og y -intervallet fra -100 til 100 .
- Afsæt ved hjælp af dit værktøj vendepunktet på grafen, dvs. det punkt S , hvor grafen skifter fra at være "glad" til at være "sur" eller omvendt.
- Afsæt et vilkårligt punkt P på grafen og udnyt værktøjsprogrammets muligheder til at spejle dette punkt i vendepunktet S . Flyt rundt på P . Hvad observerer du?

- d) Du kan også godt gøre resultatet algebraisk. Vi ser på to grafpunkter, P og Q , der ligger symmetrisk omkring vendepunktet S . Hvis det ene har førstekoordinaten $x_p = x_s - h$, hvilken førstekoordinat får da det andet punkt Q ?
- e) Vi ved nu, at P og Q ligger lige langt på hver sin side af vendepunktet i vandret retning. Hvilken ligning skal så gælde, hvis de også skal ligge lige langt på hver sin side i lodret retning?

Fælles for alle grafer for tredjegradspolynomier $p(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ er altså, at de har et symmetripunkt $S(x_0, p(x_0))$.



Vi vil nu vise, at vendepunktet har førstekoordinaten $x_s = -\frac{b}{3a}$:

Hvis der findes et symmetripunkt $S(x_0, p(x_0))$, så skal punkterne $P(x_0 - h, p(x_0 - h))$ og $Q(x_0 + h, p(x_0 + h))$ ligge lige langt på hver sin side af S både i vandret og lodret retning. Andenkoordinaten $p(x_0)$ for S skal altså være midtpunktet mellem de to punkters andenkoordinater:

$$p(x_0) = \frac{p(x_0 - h) + p(x_0 + h)}{2}$$

Løser vi denne ligning mht. x_0 , så kan vi få x_0 udtrykt ved koefficienterne i p , og på den måde kan vi let bestemme vendepunktet for et givet tredjegradspolynomium. Vi løser ligningen i et værktøjsprogram:

$$\text{solve}\left(p(x_0) = \frac{p(x_0 - h) + p(x_0 + h)}{2}, x_0\right), x_0 = \frac{-b}{3 \cdot a}$$

Man kan også ved hjælp af et værktøjsprogram udregne de to udtryk $p(x_0 - h)$ og $p(x_0 + h)$ og derefter reducere og bestemme x_0 .

Vi har dermed vist den følgende nøglesætning om tredjegradspolynomier:

Sætning 1: Tredjegradspolynomiets vendepunkt

Grafen for tredjegradspolynomiet $p(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ er symmetrisk omkring vendepunktet S, der har koordinaterne

$$S\left(-\frac{b}{3a}, p\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$$

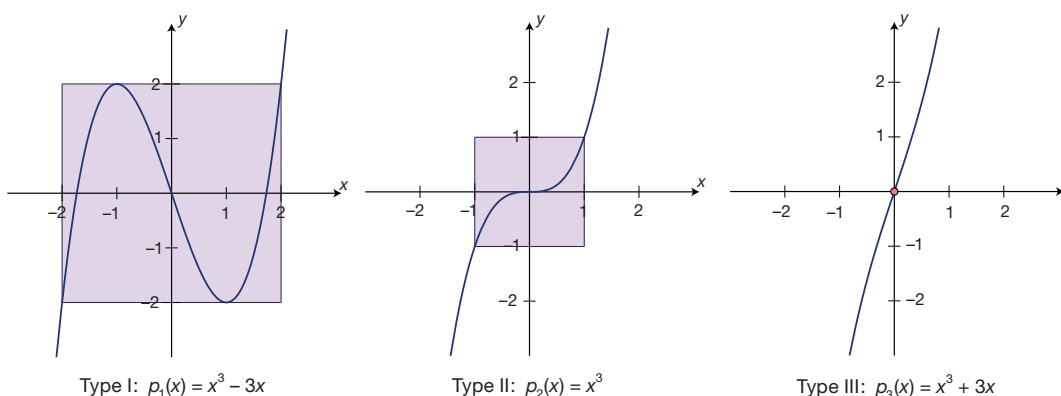
På [hjemmesiden](#) kan du finde et projekt, der nærmere undersøger grafen for tredjegradspolynomiet, herunder vendepunktets opførsel.

Opgaver

Du kan på [hjemmesiden](#) finde opgaver i tilknytning til afsnit 2.2.

2.3 Prototyperne for et tredjegradspolynomium

Ligesom der reelt kun findes en slags graf for andengradspolynomier, fordi de alle sammen kan transformeres over i prototypen $f(x) = x^2$, findes der kun 3 slags grafer for tredjegradspolynomier, fordi de alle sammen kan transformeres over i en af de følgende tre prototyper:



Alle 3 prototyper har vendepunkt i (0,0). Vi vil nu vise, hvordan grafen for et vilkårligt tredjegradspolynomium $p(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ transformeres over i en af prototyperne. Vendepunktet for p er

$$(h, k) = \left(-\frac{b}{3a}, p\left(-\frac{b}{3a}\right)\right).$$

Første trin i transformationen foretages, som vi gjorde i kapitel 2, afsnit 2.2 med andengradspolynomierne. Her forskyder vi, så vendepunktet lander i (0,0).